

## PIANIFICAZIONE DELLE TRAIETTORIE

L'esecuzione di un compito da parte di un robot comporta movimenti idonei: il problema si indica con **pianificazione e generazione delle traiettorie**

- Ogni compito comporta uno specifico movimento
  - Spostamento di oggetti
  - Assemblaggio di componenti meccanici o elettrici (circuiti stampati, sistemi meccanici, ...)
  - Saldatura
  - Lavorazione meccanica (fresatura, alesaggio, trapanatura, ...)
  - Verniciatura
- Per semplicità ci si riferisce al moto del manipolatore considerando solamente le **configurazioni dell'organo terminale**
- È utile fornire alcune **definizioni**
  - **Percorso** → descrizione geometrica della sequenza delle posizioni dell'organo terminale o più in generale del manipolatore
  - **Movimento o traiettoria** → moto in termini di posizioni, velocità e accelerazioni dell'organo terminale o più in generale del manipolatore
  - **Punti** → configurazioni dell'organo terminale o più in generale del manipolatore

- Consideriamo 2 categorie di movimento, le quali costituiscono le situazioni estreme che si incontrano nella pratica
  - Moto **punto-punto** in cui solo le configurazioni iniziali e finali sono assegnate
  - Moto con **traiettoria assegnata** in cui più parametri del moto sono richiesti
- La pianificazione implica i problemi di **interfaccia con l'operatore** umano e di tempi di calcolo in linea, per questi motivi
  - la **descrizione della traiettoria** è effettuata tramite un **numero ristretto di parametri → punti**
    - ✓ **punti estremi** della traiettoria
    - ✓ eventuali **punti intermedi** per la descrizione di una assegnata traiettoria
    - ✓ **curve di interpolazione** tra i punti
  - le **specifiche della traiettoria** sono fornite tramite **parametri globali**
    - ✓ **tempo complessivo** per l'esecuzione della traiettoria
    - ✓ limiti sulle **velocità massime** della traiettoria
    - ✓ limiti sulle **accelerazioni massime** della traiettoria
    - ✓ **solo per tratti di particolare importanza** della traiettoria si specificano le **leggi orarie del moto**

Il compito da eseguire fissa solo alcuni dei parametri del moto → i rimanenti parametri sono scelti per ottimizzare dal robot ↔ pianificare le traiettorie.

- Rispettando le specifiche del compito si **pianificano le traiettorie** più convenienti per la realizzazione del compito
- Si definiscono degli **algoritmi di pianificazione** della traiettoria → cioè **si ottimizza il movimento** seguendo definiti **indici di qualità**, nel rispetto delle specifiche imposte dall'**esecuzione del compito**
  - i **dati di ingresso** a questi algoritmi sono
    - ✓ la **specifiche della traiettoria**, generalmente sotto forma di configurazioni dell'organo terminale nello spazio esterno
    - ✓ i **vincoli del percorso** → ostacoli
    - ✓ i **limiti cinematici e dinamici** del manipolatore
  - i **risultati** degli algoritmi di pianificazione sono
    - ✓ le **traiettorie ottimizzate** del manipolatore cioè la sequenza temporale delle posizioni, velocità e accelerazioni dei giunti
- La pianificazione è effettuata dall'unità centrale di controllo → la pianificazione definisce gli **ingressi di riferimento** da fornire al **sistema di controllo** del robot

- La traiettoria è specificata assegnando con riferimento allo spazio cartesiano esterno alcuni parametri del moto
  - Punti iniziale e finale ed eventuali punti intermedi nello spazio cartesiano
  - Tempi di percorrenza di determinati tratti
  - Requisiti sulle velocità, sull'accelerazione, ...
- Tramite l'inversione cinematica si trasformano le specifiche dallo spazio cartesiano allo spazio dei giunti → la procedura dipende dal tipo di movimento
  - Nel moto **punto-punto** solo le **configurazioni iniziali e finali** sono imposte
    - ✓ Si risolve il problema cinematico inverso per le configurazioni estreme
    - ✓ Si definisce la traiettoria ottimale ai fini dell'esecuzione del compito, cioè si stabiliscono le leggi orarie delle coordinate dei giunti e delle loro derivate
  - Nel moto con **traiettoria assegnata** il **marginale di decisione è inferiore**
    - ✓ Si risolve il problema cinematico inverso per tutti i punti assegnati → punti estremi e punti intermedi
    - ✓ Si scelgono le leggi orarie delle coordinate dei giunti e delle loro derivate nell'ambito delle possibilità di scelta lasciate libere dalle specifiche imposte dall'assegnazione della traiettoria

- Nel rispetto dei requisiti imposti, l'algoritmo di pianificazione deve generare <sup>3</sup> delle funzioni temporali di interpolazione delle variabili di giunto e delle loro derivate, le quali collegano
  - nel caso di moto punto-punto, solamente i punti estremi
  - nel caso di moto con traiettoria assegnata, tutti i punti assegnati e quindi anche i punti intermedi
- Le traiettorie dei giunti  $q_i(t)$ ,  $\dot{q}_i(t)$ ,  $\ddot{q}_i(t)$  devono soddisfare alcuni requisiti
  - Le **posizioni** e le **velocità** ed eventualmente le **accelerazioni** devono essere **funzioni continue del tempo**
  - Il moto deve rispondere a **criteri generali di regolarità** per **ridurre effetti meccanici indesiderati** quali vibrazioni e scuotimenti
  - Devono essere **vantaggiose dal punto di vista computazionale**
  - Devono soddisfare gli **indici di qualità** definiti per ottimizzare le traiettorie
    - ✓ Tempo minimo di azionamento
    - ✓ Potenza minima fornita dagli attuatori
    - ✓ ...

- Il procedimento di **ottimizzazione** deve individuare preliminarmente **specifiche** e **vincoli** del problema → a questo fine devono essere analizzate le **caratteristiche del compito e dell'ambiente di lavoro** e le **proprietà elettromeccaniche ed elettroniche del robot**
  - Specifiche dettate dal compito da eseguire → assegnazioni sulle traiettorie (posizioni, velocità, accelerazioni ...)
  - Vincoli causati da eventuali ostacoli nello spazio di lavoro
  - Limiti sulle velocità, accelerazioni, coppie e forze e potenze relativi ai limiti meccanici dei motori, dei riduttori di velocità e delle trasmissioni
  - Limitazioni dovute alla struttura del manipolatore → fine corsa dei giunti
  - Limiti sulla coppia e potenza erogabili, dovuti ai valori massimi di tensione, corrente e frequenza degli azionamenti e dei motori
  - Limiti del controllo digitale sulla precisione della traiettoria → frequenza di aggiornamento, non linearità e errori di campionamento
  - Fenomeni legati all'elasticità dei membri e ai giochi dei giunti → vibrazioni e irregolarità di funzionamento

- Le cause elencate implicano per ogni giunto e quindi per **ogni grado di mobilità** del manipolatore delle **limitazioni** riguardanti
  - **Posizione**
  - **Velocità**
  - **Accelerazione**
  - **Forza o coppia** del corrispondente attuatore
- Per semplicità il **procedimento di ottimizzazione** del movimento può riassumersi nei seguenti **passi**
  - **Individuazione dei limiti di ciascun grado di mobilità** del robot
  - **Ottimizzazione separata** della traiettoria di ciascun grado di mobilità
  - **Ottimizzazione globale** del comportamento dell'intero robot
- Alcuni dei concetti sopra citati sono nel seguito esposti con esempi elementari e con delle semplificazioni
  - Si considera all'inizio un **robot con 1 grado di mobilità** → le considerazioni che si ottengono sono valide per il passo di **ottimizzazione separata**
  - Si considerano **dominanti** le **forze d'inerzia** → le forze d'inerzia sono le uniche forze presenti, quando non esplicitamente specificato

## ESEMPIO DI PIANIFICAZIONE DELLA TRAIETTORIA

Per esporre i concetti appena citati consideriamo un semplice esempio

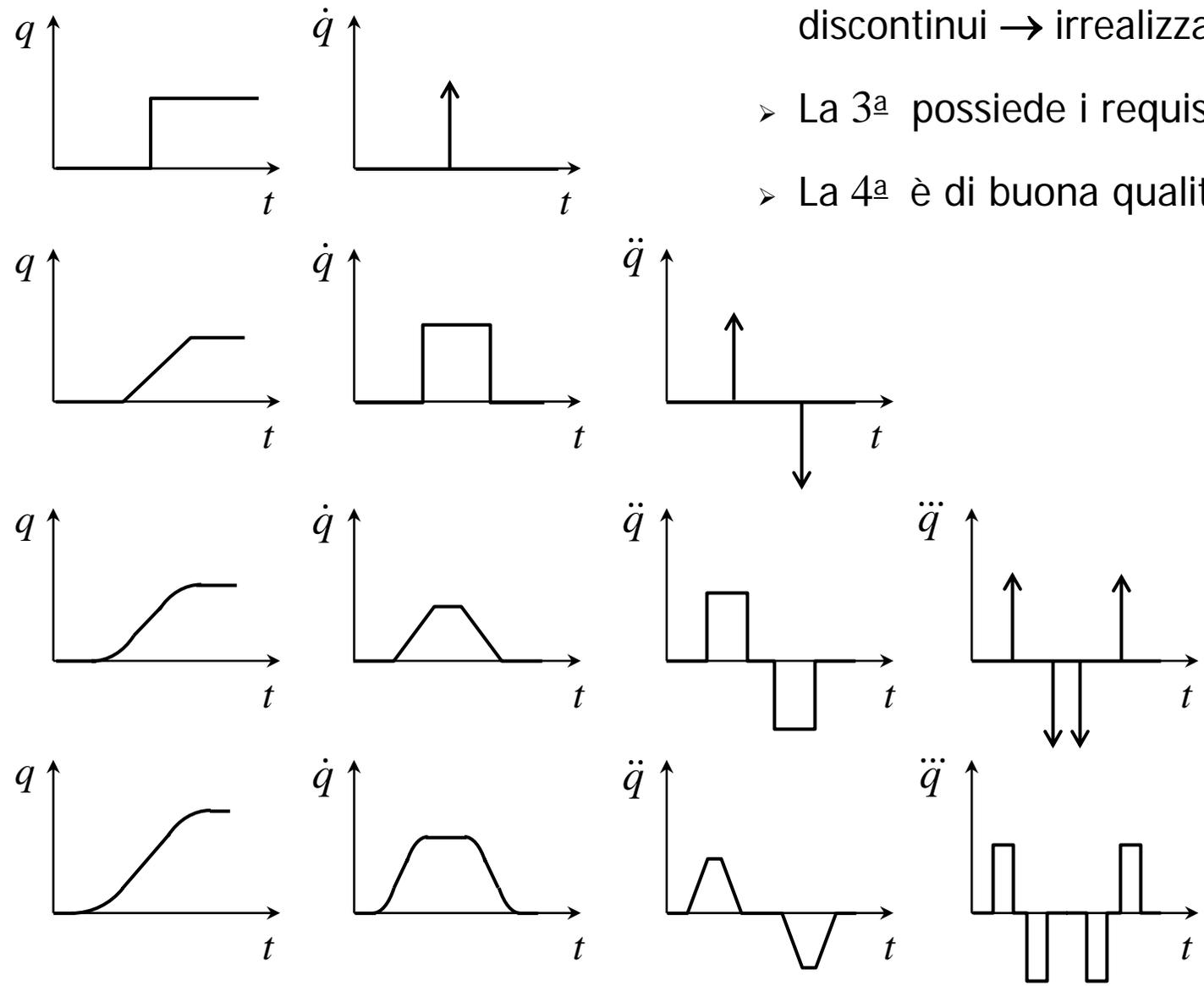
- Robot con **1 grado di mobilità**
- Traiettoria con **legge di moto elementare**
- Le considerazioni **si estendono a ogni grado di mobilità dei robot reali**

### Leggi di moto

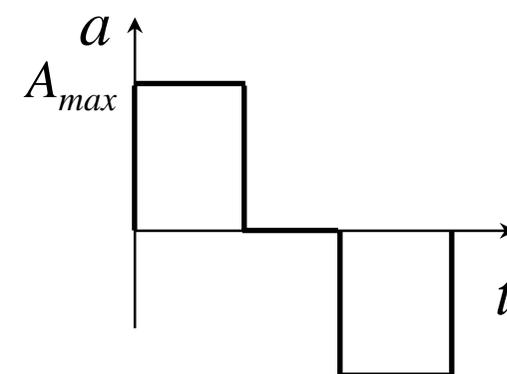
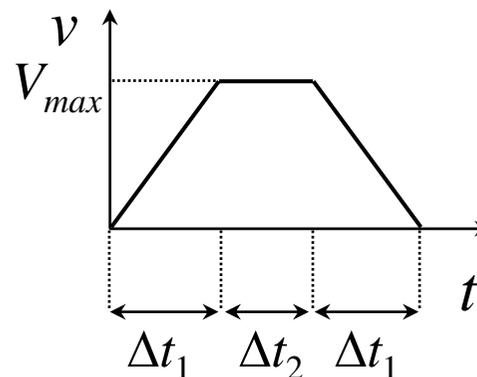
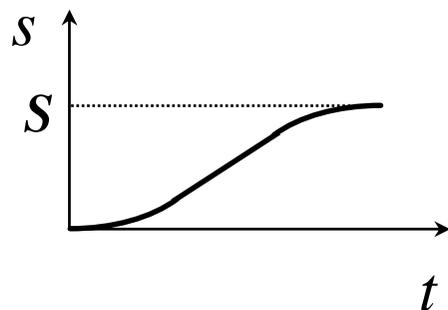
- La traiettoria deve soddisfare alcuni **requisiti di continuità**
  - Continuità dello spostamento → necessaria
  - Continuità della velocità → necessaria
  - Continuità dell'accelerazione → raccomandata
  - Informazioni sull'accelerazione si ottengono dalla derivata terza → jerk
- Per valutare le **qualità delle traiettorie**, consideriamo la **famiglia di traiettorie elementari** con leggi di moto di tipo **polinomiale misto**
  - Costruita assumendo **una delle derivate** rispetto al tempo della legge di moto **costante a tratti** e ricavando le altre leggi orarie di conseguenza
  - **Maggiore è l'ordine della derivata** della legge oraria costante a tratti **maggiore è la regolarità del movimento**

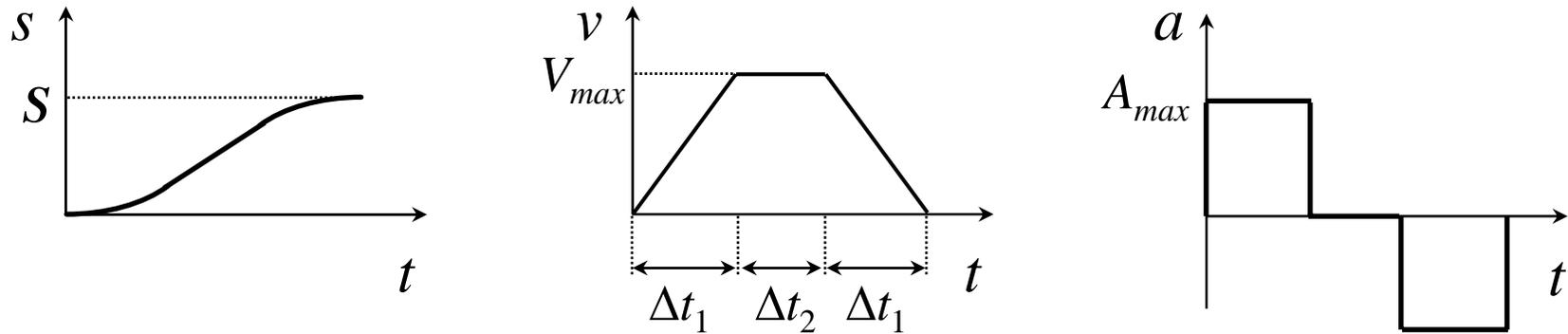
▪ Le **leggi di moto polinomiali miste** sono in genere usate per analizzare il comportamento meccanico dei robot; alcune sono usate nella pratica industriale

- Le prime 2 hanno spostamento o velocità discontinui → irrealizzabili nella pratica
- La 3<sup>a</sup> possiede i requisiti minimi
- La 4<sup>a</sup> è di buona qualità



- Come **criterio di ottimizzazione** assumiamo quello di **minimizzare la potenza massima** richiesta all'attuatore per azionare il robot
  - Questo criterio equivale a minimizzare i costi del motore, della trasmissione e dell'elettronica di potenza
  - nell'ipotesi di forze d'inerzia dominanti equivale a → minimizzare il prodotto tra accelerazione e velocità
  
- **Dati del problema**
  - Robot con un grado di mobilità
  - È assegnata l'entità dello spostamento  $S$
  - Consideriamo come già stabilita la forma della legge di moto
  - È assegnato il tempo di azionamento  $T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_1$





- Ci si propone di trovare il valore di  $\Delta t_1$  o del rapporto  $\lambda = \Delta t_1/T$  che minimizza la potenza che deve essere fornita dall'attuatore per realizzare il compito
  - Esprimiamo  $V_{\max}$  e  $A_{\max}$  in funzione dei parametri del problema
    - ✓ lo spostamento  $S$  risulta

$$S = \frac{1}{2}V_{\max} \Delta t_1 + V_{\max} \Delta t_2 + \frac{1}{2}V_{\max} \Delta t_1 = V_{\max} (\Delta t_1 + \Delta t_2)$$

$$\begin{cases} \Delta t_2 = T - 2\Delta t_1 \\ V_{\max} = A_{\max} \Delta t_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = V_{\max} (\Delta t_1 + T - 2\Delta t_1) = V_{\max} (T - \Delta t_1) & \rightarrow 1^a \\ S = A_{\max} \Delta t_1 (T - \Delta t_1) & \rightarrow 2^a \end{cases}$$

- ✓ dividendo la 1<sup>a</sup> per  $T$  e la 2<sup>a</sup> per  $T^2$  e introducendo il rapporto  $\lambda = \Delta t_1/T$  si ha

$$\begin{cases} \frac{S}{T} = V_{\max} \left(1 - \frac{\Delta t_1}{T}\right) = V_{\max} (1 - \lambda) \\ \frac{S}{T^2} = A_{\max} \frac{\Delta t_1}{T} \left(1 - \frac{\Delta t_1}{T}\right) = A_{\max} \lambda (1 - \lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{\max} = \frac{S}{T} \frac{1}{(1 - \lambda)} \\ A_{\max} = \frac{S}{T^2} \frac{1}{\lambda(1 - \lambda)} \end{cases}$$

- Introduciamo i coefficienti di velocità, accelerazione e potenza  $c_v$ ,  $c_a$  e  $c_p$  che costituiscono un indice della relazione tra valori massimi e medi; la loro definizione generale è

$$c_v = \frac{V_{\max}}{S/T} \quad c_a = \frac{A_{\max}}{S/T^2} \quad c_p = \frac{P_{m,\max}}{S^2/T^3}$$

- Usando queste definizioni, per la legge di moto adottata si trovano le espressioni

$$\begin{cases} V_{\max} = \frac{S}{T} \frac{1}{(1-\lambda)} \\ A_{\max} = \frac{S}{T^2} \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_v = \frac{V_{\max}}{S/T} = \frac{1}{(1-\lambda)} \\ c_a = \frac{A_{\max}}{S/T^2} = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \end{cases}$$

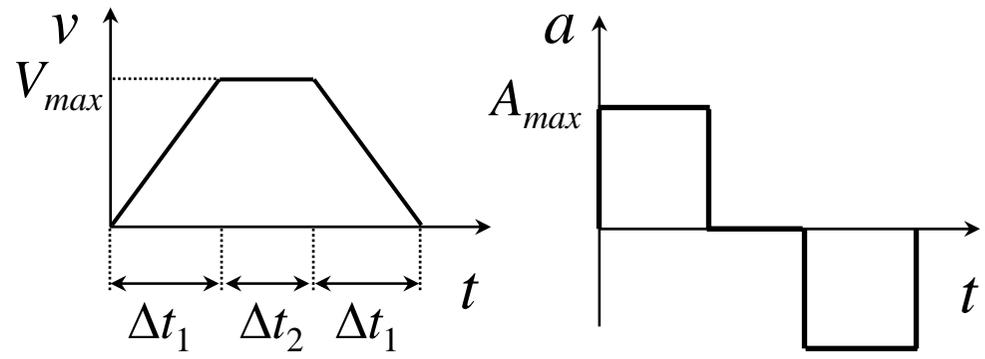
- La potenza specifica per unità di massa, nel caso di sole forze d'inerzia, è

$$P_m = (\text{forza d'inerzia} \times \text{velocità}) / \text{massa} \quad \therefore \quad P_m = |\text{accelerazione} \times \text{velocità}|$$

- Con la legge di moto adottata si ha all'istante  $\Delta t_1$  sia la velocità massima sia l'accelerazione massima

- La potenza specifica massima è

$$P_{m,\max} = V_{\max} \cdot A_{\max}$$



➤ La potenza specifica massima è  $P_{m, \max} = V_{\max} \cdot A_{\max}$

$$P_{m, \max} = V_{\max} \cdot A_{\max} = \frac{\mathbf{S}^2}{\mathbf{T}^3} \frac{1}{\lambda(1-\lambda)^2} = \frac{\mathbf{S}^2}{\mathbf{T}^3} c_p \Rightarrow c_p = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)^2}$$

➤  $c_p$  ha un minimo per  $\rightarrow \frac{dc_p}{d\lambda} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - \lambda \cdot 2(1-\lambda) = 0$

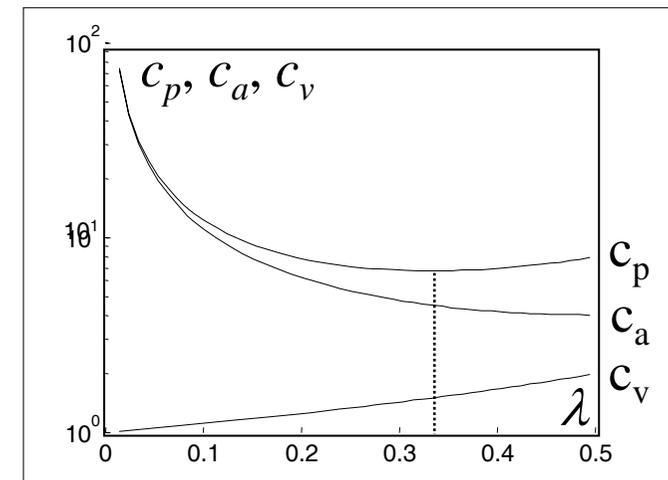
$$1 + \lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda + 2\lambda^2 = 3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{4-3}}{3} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1/3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

➤ Essendo  $\rightarrow 0 < \lambda = \frac{\Delta t_1}{\mathbf{T}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = 1/3$

➤  $\lambda = 1/3$  è una soluzione accettabile perché anche la velocità e l'accelerazione sono limitate

$$\lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} c_v = \frac{1}{(1-\lambda)} = \frac{3}{2} & \rightarrow V_{\max} = \frac{3 \mathbf{S}}{2 \mathbf{T}} \\ c_a = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} = \frac{9}{2} & \rightarrow A_{\max} = \frac{9 \mathbf{S}}{2 \mathbf{T}^2} \\ c_p = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)^2} = \frac{27}{4} & \rightarrow P_{m, \max} = \frac{27 \mathbf{S}^2}{4 \mathbf{T}^3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_{\max} &= \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{T}} \frac{1}{(1-\lambda)} \\ A_{\max} &= \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{T}^2} \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \\ c_p &= \frac{P_{m, \max}}{\mathbf{S}^2 / \mathbf{T}^3} \end{aligned}$$



## SCALATURA DINAMICA DELLE LEGGI DI MOTO

È un'operazione che consente di **adeguare le traiettorie** pianificate

❖ alle traiettorie pianificate degli altri giunti → **ottimizzazione globale**

❖ alle **caratteristiche dinamiche ed elettriche** del robot

- Al termine dell'ottimizzazione si ottengono delle traiettorie che impongono prestazioni dinamiche che il robot può non essere in grado di fornire
- Proseguendo l'esempio precedente, in relazione al tempo assegnato per l'esecuzione e all'ampiezza assegnata dello spostamento

➢ Ottenuto il valore ottimo di  $\lambda$  sono definiti i valori di  $c_v$ ,  $c_a$ ,  $c_p$

$$c_v = \frac{1}{(1-\lambda)} \quad c_a = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \quad c_p = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)^2}$$

➢ Assegnati il tempo di esecuzione  $T$  e l'ampiezza dello spostamento  $S$  risultano fissati  $v_{\max}$ ,  $a_{\max}$  e  $P_{m,\max}$

$$v_{\max} = c_v \frac{S}{T}, \quad a_{\max} = c_a \frac{S}{T^2}, \quad P_{m,\max} = c_p \frac{S^2}{T^3}$$

➢ A questo punto può essere necessario **modificare  $T$**  e/o  **$S$**  per **adeguare la traiettoria alle prestazioni** del robot

Per un robot con un grado di mobilità consideriamo il movimento costituito da

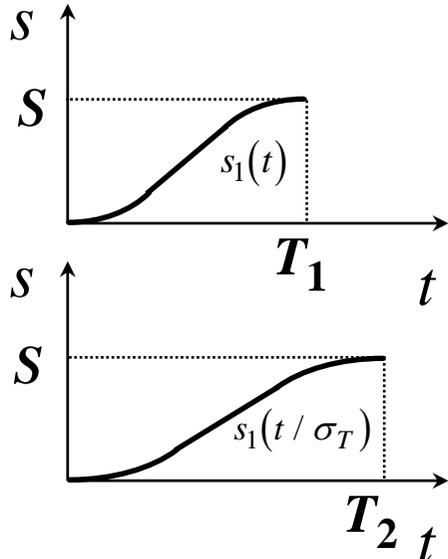
- Uno spostamento di ampiezza  $S$  con il tempo di esecuzione  $T_1$
- Lo stesso spostamento  $S$  con il tempo di esecuzione  $T_2 = \sigma_T T_1$ 
  - per  $\sigma_T > 1$  questa operazione può essere vista come una **dilatazione della scala dei tempi**

▪ Leggi orarie per tempo di esecuzione  $T_1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} s_1(t) \\ v_1(t) = \frac{ds_1(t)}{dt} \\ a_1(t) = \frac{d^2s_1(t)}{dt^2} \end{cases}$$

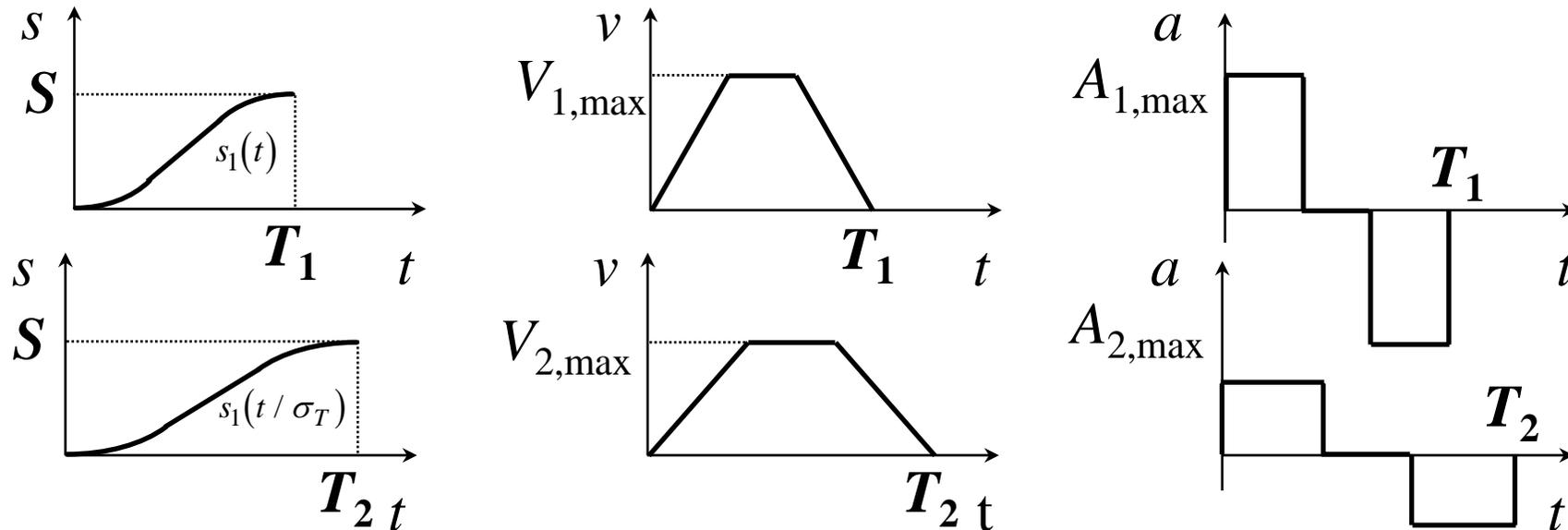
▪ Leggi orarie per tempo di esecuzione  $T_2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} s_2(t) = s_1(t/\sigma_T) \\ v_2(t) = \frac{ds_2(t)}{dt} = \frac{ds_1(t/\sigma_T)}{dt} = \frac{1}{\sigma_T} \frac{ds_1(t/\sigma_T)}{d(t/\sigma_T)} = \frac{1}{\sigma_T} v_1(t/\sigma_T) \\ a_2(t) = \frac{d^2s_2(t)}{dt^2} = \frac{d^2s_1(t/\sigma_T)}{dt^2} = \frac{1}{\sigma_T^2} \frac{d^2s_1(t/\sigma_T)}{d(t/\sigma_T)^2} = \frac{1}{\sigma_T^2} a_1(t/\sigma_T) \end{cases}$$



- La **velocità** e l'**accelerazione massime** si riducono di  $1/\sigma_T$  e  $1/\sigma_T^2$

$$V_{2,\max} = (1/\sigma_T)V_{1,\max}, \quad A_{2,\max} = (1/\sigma_T^2)A_{1,\max}$$



- La dilatazione dei tempi ha un effetto sull'azione richiesta all'attuatore
  - L'attuatore deve vincere le azioni esterne e le azioni d'inerzia

$$F_{att}(t) = F_{est}(t) + F_{in}(t) = F_{est}(t) + m \cdot a(t)$$

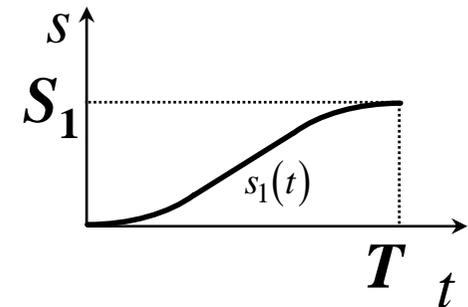
- Produce una riduzione delle  $F_{in}(t)$  di  $1/\sigma_T^2$ , mentre le  $F_{est}(t)$  restano in genere inalterate  $\rightarrow$  si ha un beneficio consistente se le  $F_{in}(t)$  sono importanti
- In genere aumenta la regolarità del moto

Per un robot con un grado di mobilità consideriamo il movimento costituito da

- Uno spostamento di ampiezza  $S_1$  con il tempo di esecuzione  $T$
- Uno spostamento  $S_2 = \sigma_S S_1$  con lo stesso tempo di esecuzione  $T$ 
  - per  $\sigma_S > 1$  questa operazione equivale a una **dilatazione della scala delle ampiezze dello spostamento**

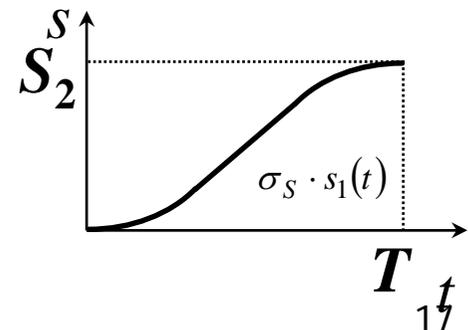
▪ Leggi orarie con spostamento  $S_1 \rightarrow$

$$\begin{cases} s_1(t) \\ v_1(t) = \frac{ds_1(t)}{dt} \\ a_1(t) = \frac{d^2s_1(t)}{dt^2} \end{cases}$$



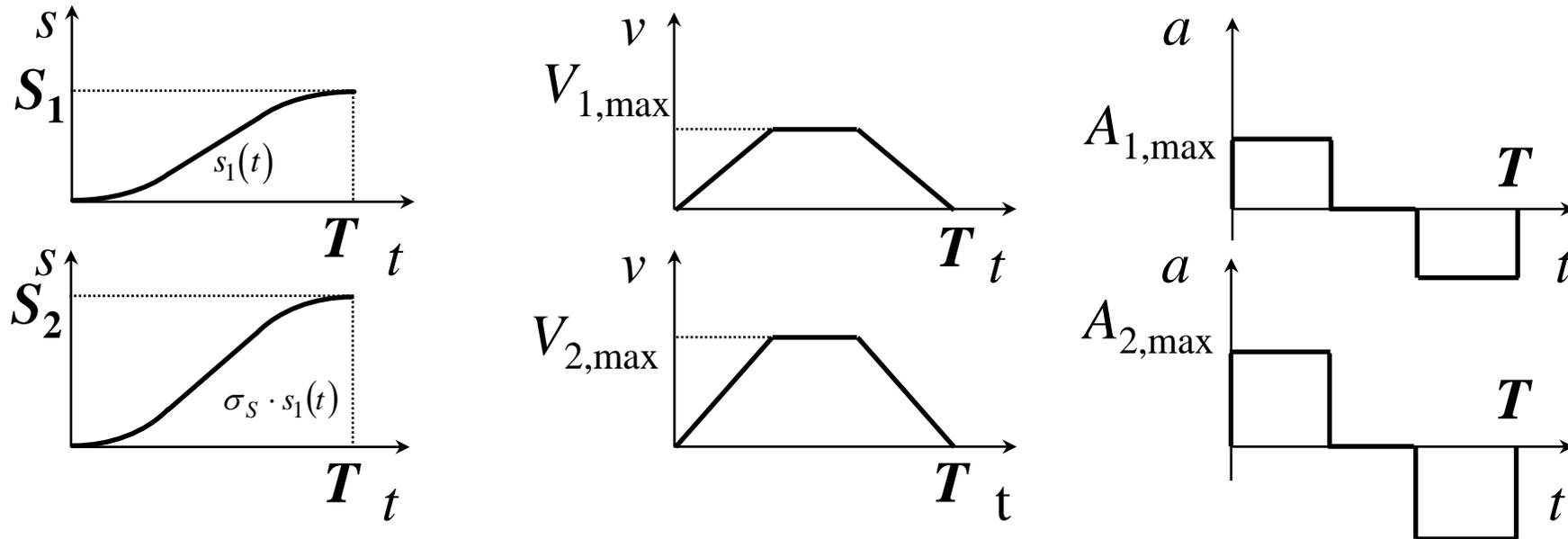
▪ Leggi orarie con spostamento  $S_2 \rightarrow$

$$\begin{cases} s_2(t) = \sigma_S s_1(t) \\ v_2(t) = \frac{ds_2(t)}{dt} = \sigma_S v_1(t) \\ a_2(t) = \frac{d^2s_2(t)}{dt^2} = \sigma_S a_1(t) \end{cases}$$



- La **velocità** e l'**accelerazione massime** si **incrementano** entrambe di  $\sigma_S$

$$v_{2,\max} = \sigma_S \cdot v_{1,\max} , \quad a_{2,\max} = \sigma_S \cdot a_{1,\max}$$



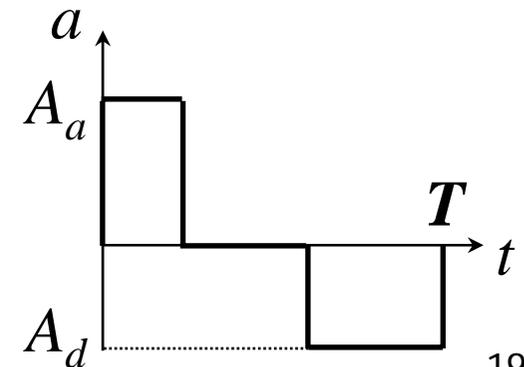
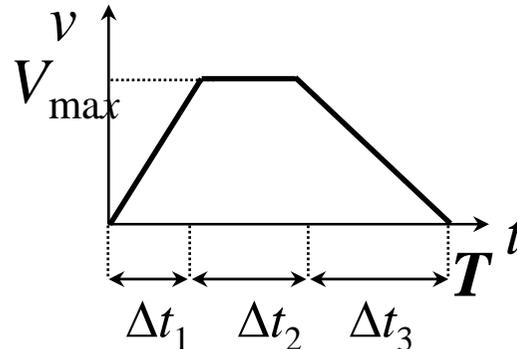
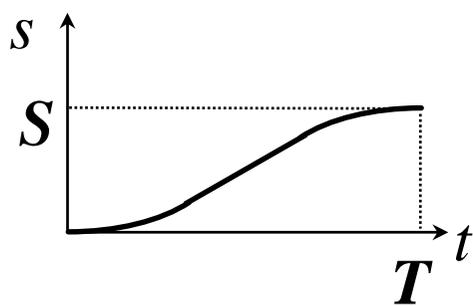
- L'aumento dell'ampiezza dello spostamento ha un effetto sull'azione richiesta all'attuatore
  - L'attuatore deve vincere le azioni esterne e le azioni d'inerzia

$$F_{att}(t) = F_{est}(t) + F_{in}(t) = F_{est}(t) + m \cdot a(t)$$

- Provoca un incremento della forza d'inerzia  $F_{in}(t)$  di  $\sigma_S$  mentre le forze esterne  $F_{est}(t)$  subiscono una variazione non valutabile a priori

## LEGGE DI MOTO CON TEMPO DI ESECUZIONE MINIMO

- Per un robot con un grado di mobilità si vuole **determinare il tempo minimo di esecuzione** del compito con le seguenti **assegnazioni**
  - spostamento **punto-punto** ad esempio da fermo a fermo (rest to rest)
  - **forze d'inerzia dominanti** → le altre forze risultano trascurabili
  - **velocità massima assegnata**
  - **accelerazione massima assegnata**
  - **decelerazione massima assegnata**
- La legge che realizza il tempo di esecuzione minimo nel rispetto della continuità cinematica è quella che ha
  - un tratto iniziale con accelerazione massima  $A_a$  → sino al raggiungimento della velocità massima
  - eventuale tratto intermedio con velocità massima → velocità di crociera
  - un tratto finale con decelerazione massima  $A_d$

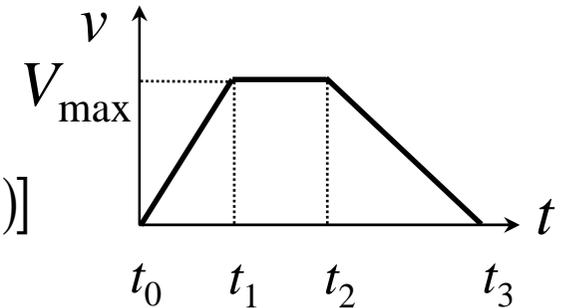


- Per il calcolo del tempo di azionamento → si presentano 2 possibili situazioni

➤ **1° caso** → l'ampiezza dello spostamento consente il **raggiungimento della velocità massima**  $V_{\max}$

$$S = \frac{1}{2}V_{\max}(t_1 - t_0) + V_{\max}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}V_{\max}(t_3 - t_2)$$

$$S = \frac{1}{2}V_{\max}(t_1 - t_0 + t_3 - t_2 + 2t_2 - 2t_1) = \frac{1}{2}V_{\max}[(t_3 - t_0) + (t_2 - t_1)]$$



✓ Per esprimere le relazioni in funzione di  $V_{\max}$ ,  $A_a$  e  $A_d$  si scrive

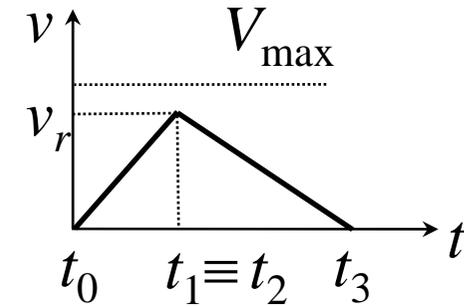
$$\begin{cases} V_{\max} = A_a(t_1 - t_0) & \therefore (t_1 - t_0) = \frac{V_{\max}}{A_a} \\ V_{\max} = A_d(t_3 - t_2) & \therefore (t_3 - t_2) = \frac{V_{\max}}{A_d} \end{cases} \longrightarrow (t_3 - t_0) - (t_2 - t_1) = V_{\max} \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_d} \right)$$

✓ Essendo  $T = t_3 - t_0$  si ha

$$\begin{cases} T + (t_2 - t_1) = 2 \frac{S}{V_{\max}} \\ T - (t_2 - t_1) = V_{\max} \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_d} \right) \end{cases}$$

$$T = \frac{S}{V_{\max}} + \frac{1}{2}V_{\max} \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_d} \right)$$

- **2° caso** → lo spostamento è piccolo e quando la fase di frenatura inizia **la velocità massima non è stata ancora raggiunta** → in queste condizioni i limiti sono imposti dalle sole accelerazione  $A_a$  e decelerazione  $A_d$



$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} v_r (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} v_r (t_3 - t_1) \\ v_r = A_a (t_1 - t_0) = A_d (t_3 - t_1) \end{cases} \rightarrow S = \frac{1}{2} A_a (t_1 - t_0)^2 + \frac{1}{2} A_d (t_3 - t_1)^2$$

- ✓ per esprimere  $T$  in funzione di  $A_a$  e  $A_d$  definiamo gli intervalli di tempo in funzione dei parametri della traiettoria → dalle precedenti si ricava

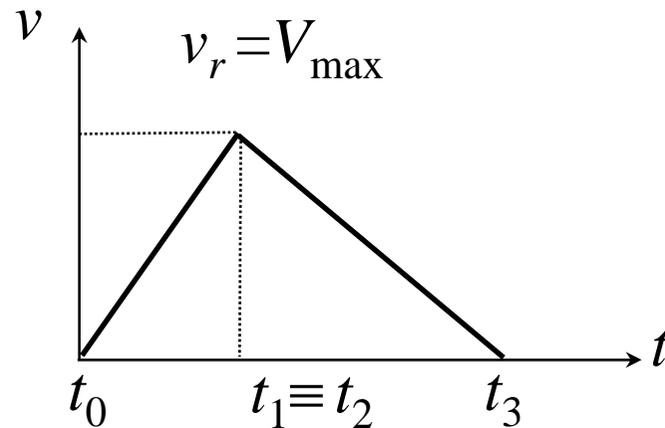
$$(t_1 - t_0)^2 = \frac{2S}{A_a} - \frac{A_d}{A_a} (t_3 - t_1)^2, \quad (t_3 - t_1) = \frac{A_a}{A_d} (t_1 - t_0) \quad \therefore (t_1 - t_0)^2 = \frac{2S}{A_a} - \frac{A_d}{A_a} \frac{A_a^2}{A_d^2} (t_1 - t_0)^2$$

$$(t_1 - t_0)^2 \left( 1 + \frac{A_a}{A_d} \right) = \frac{2S}{A_a} \Rightarrow (t_1 - t_0)^2 = 2S \frac{A_d}{A_a} \cdot \frac{1}{A_a + A_d} \Rightarrow (t_1 - t_0) = \sqrt{\frac{A_d}{A_a}} \sqrt{\frac{2S}{A_a + A_d}}$$

$$(t_3 - t_1) = \frac{A_a}{A_d} (t_1 - t_0) \Rightarrow (t_3 - t_1) = \sqrt{\frac{A_a}{A_d}} \sqrt{\frac{2S}{A_a + A_d}}$$

- ✓ per il tempo di azionamento  $T$  si ha →  $T = t_3 - t_0 = \left( \sqrt{\frac{A_a}{A_d}} + \sqrt{\frac{A_d}{A_a}} \right) \sqrt{\frac{2S}{A_a + A_d}}$

➤ **Caso limite di separazione** tra i casi precedenti  $\rightarrow v_r = V_{\max}$



✓ il punto di separazione in un grafico  $(S, T)$  che riporta

spostamento  $\rightarrow$  tempo di esecuzione minimo

ha coordinate

$$\bar{S} = \frac{1}{2} V_{\max} (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} V_{\max} (t_3 - t_1) = \frac{1}{2} V_{\max} (t_3 - t_0) \quad \Rightarrow \quad \bar{T} = (t_3 - t_0) = 2 \frac{\bar{S}}{V_{\max}}$$

$$V_{\max} = A_a (t_1 - t_0) = A_d (t_3 - t_1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (t_1 - t_0) = \frac{V_{\max}}{A_a} \\ (t_3 - t_1) = \frac{V_{\max}}{A_d} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{T} = V_{\max} \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_d} \right)}$$

$$2 \frac{\bar{S}}{V_{\max}} = V_{\max} \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_d} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{S} = \frac{1}{2} V_{\max}^2 \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_d} \right)}$$

- Questi risultati si possono mostrare con un grafico che riporta: spostamento assegnato  $\rightarrow$  tempo di esecuzione minimo

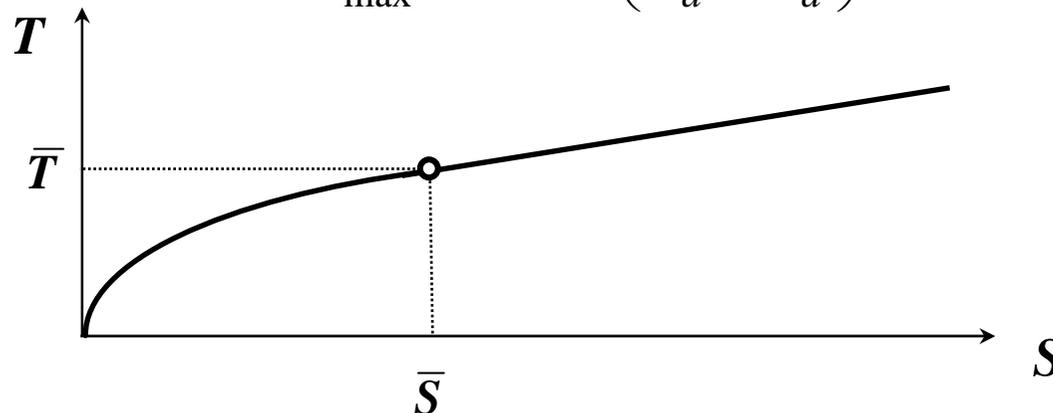
➤ Il punto con coordinate  $\longrightarrow \left[ \bar{S} = \frac{1}{2} V_{\max}^2 \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_d} \right); \bar{T} = V_{\max} \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_d} \right) \right]$  definisce due regioni della curva

- ✓ Per spostamenti minori dello spostamento  $\bar{S}$  di separazione la curva è di tipo parabolico

$$T = \left( \sqrt{\frac{A_a}{A_d}} + \sqrt{\frac{A_d}{A_a}} \right) \sqrt{\frac{2S}{A_a + A_d}}$$

- ✓ Per spostamenti maggiori dello spostamento  $\bar{S}$  di separazione la curva ha andamento lineare

$$T = \frac{S}{V_{\max}} + \frac{1}{2} V_{\max} \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_d} \right)$$



## MOVIMENTO PUNTO-PUNTO

Dopo l'introduzione dei concetti di pianificazione delle traiettorie applicati a un robot elementare, consideriamo un **caso generale** di movimento **punto-punto**

- Robot con **6** gradi di mobilità
  - Traiettorie con tempo di esecuzione minimo relativamente alle leggi di moto scelte
  - Per semplicità, si considerano solamente le pose dell'organo terminale
  - Si suppone che la posa dell'organo terminale sia descritta con una rappresentazione in coordinate minime

$$\text{posizione iniziale} \rightarrow \mathbf{P}_p = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ \alpha_p \\ \beta_p \\ \gamma_p \end{Bmatrix}$$

$$\text{posizione finale} \rightarrow \mathbf{P}_a = \begin{Bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \\ \alpha_a \\ \beta_a \\ \gamma_a \end{Bmatrix}$$

- 1) Si risolve il **problema cinematico inverso** per la posizione e si calcolano le posizioni estreme del movimento nello spazio dei giunti

$$\text{configurazione iniziale} \rightarrow \mathbf{Q}_p = \begin{Bmatrix} q_{1p} \\ q_{2p} \\ q_{3p} \\ q_{4p} \\ q_{5p} \\ q_{6p} \end{Bmatrix} \quad \text{configurazione finale} \rightarrow \mathbf{Q}_a = \begin{Bmatrix} q_{1a} \\ q_{2a} \\ q_{3a} \\ q_{4a} \\ q_{5a} \\ q_{6a} \end{Bmatrix}$$

- 2) Si calcola il **vettore dello spostamento** nello spazio dei giunti

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_a - \mathbf{Q}_p = \begin{Bmatrix} \Delta q_1 \\ \vdots \\ \Delta q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{1a} - q_{1p} \\ \vdots \\ q_{6a} - q_{6p} \end{Bmatrix}$$

- 3) Si calcolano i **tempi di azionamento minimi**  $T_i$  per ciascun grado di mobilità  $i$  in base

- alla legge di moto scelta
- ai limiti relativi al giunto  $V_{\max}$ ,  $A_{\max}$  e  $P_{m,\max}$

- 4) Si calcola il **tempo di azionamento dell'intero sistema**  $\rightarrow T_a = \max_{i=1}^6 \{T_i\}$  3  
2
- 5) Si **scalano le leggi di moto** per ciascun grado di mobilità  $i$
- È conveniente far compiere tutti gli spostamenti dei giunti con il medesimo tempo di azionamento  $T_a$  per evitare inutili sovraccarichi ai motori
  - Si calcolano i coefficienti di dilatazione  $\rightarrow \lambda_i = T_a/T_i$
  - Il tempo di azionamento di ciascun giunto è  $\rightarrow \hat{T}_i = \lambda_i T_i = T_a$
  - Un **affinamento** e un **chiarimento** si ottiene introducendo alcune modifiche al punto 3) di questo procedimento
    - Si memorizzano alcuni tipi di **leggi di moto** nell'unità di controllo del robot
      - ✓ traiettoria con accelerazione costante a tratti
      - ✓ traiettoria con accelerazione trapezoidale
      - ✓ ...
    - Queste leggi sono memorizzate per valori nominali
      - ✓ del tempo di azionamento  $T_r$
      - ✓ dell'ampiezza dello spostamento  $S_r$
      - ✓ della velocità massima  $V_{\max,r}$
      - ✓ dell'accelerazione massima  $A_{a,r}$  e della decelerazione massima  $A_{d,r}$

- Si eseguono i punti 1) e 2)  $\rightarrow \Delta Q$ 
  - ✓ l'unità di controllo sceglie la legge di moto più idonea per ogni grado di mobilità, con criteri predefiniti
- Per ogni giunto  $i$  la legge di moto viene scalata considerando lo spostamento effettivo  $S_i \rightarrow \Delta q_i$
- il tempo di azionamento  $T_i$  si definisce come segue
  - ✓ Per i limiti elettromeccanici di ogni giunto  $i$  sono note
    - la velocità massima  $V_{\max,i}$
    - l'accelerazione massima  $A_{a,i}$  e la decelerazione massima  $A_{d,i}$
  - ✓ Si calcola per ogni giunto  $i$  il tempo di azionamento minimo
    - dai valori nominali dei parametri  $T_r, S_r, V_{\max,r}, A_{a,r}$  e  $A_{d,r}$  si ha
 
$$T_r = c_1 S_r / V_{\max,r} \quad T_r^2 = c_2 S_r / A_{a,r} \quad T_r^2 = c_3 S_r / A_{d,r}$$
    - per il giunto  $i$  considerando lo spostamento effettivo  $S_i$  e i limiti  $V_{\max,i}, A_{a,i}$  e  $A_{d,i}$  si ha
 
$$T_{1,i} = c_1 S_i / V_{\max,i} \quad T_{2,i}^2 = c_2 S_i / A_{a,i} \quad T_{3,i}^2 = c_3 S_i / A_{d,i}$$

- ✓ Combinando le relazioni analoghe si ha

$$\frac{T_{1,i}}{T_r} = \frac{S_i/V_{\max,i}}{S_r/V_{\max,r}} \quad \Rightarrow \quad T_{1,i} = \lambda_{1,i} T_r \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,i} = \frac{S_i/V_{\max,i}}{S_r/V_{\max,r}}$$

$$\frac{T_{2,i}^2}{T_r^2} = \frac{S_i/A_{a,i}}{S_r/A_{a,r}} \quad \Rightarrow \quad T_{2,i}^2 = \lambda_{2,i}^2 T_r^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2,i} = \frac{S_i/A_{a,i}}{S_r/A_{a,r}}$$

$$\frac{T_{3,i}^2}{T_r^2} = \frac{S_i/A_{d,i}}{S_r/A_{d,r}} \quad \Rightarrow \quad T_{3,i}^2 = \lambda_{3,i}^2 T_r^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{3,i} = \frac{S_i/A_{d,i}}{S_r/A_{d,r}}$$

- ✓ Si determina il tempo di azionamento minimo del giunto  $i$

$$\lambda_i = \max_{j=1}^3 \{ \lambda_{j,i} \} \quad \longrightarrow \quad T_i = \lambda_i T_r$$

- Si seguono i punti **4)** e **5)** del procedimento precedente

4) Si calcola il **tempo di azionamento dell'intero sistema**  $\rightarrow T_a = \max_{i=1}^6 \{ T_i \}$

5) Si **scalano le leggi di moto** per ciascun grado di mobilità  $i$

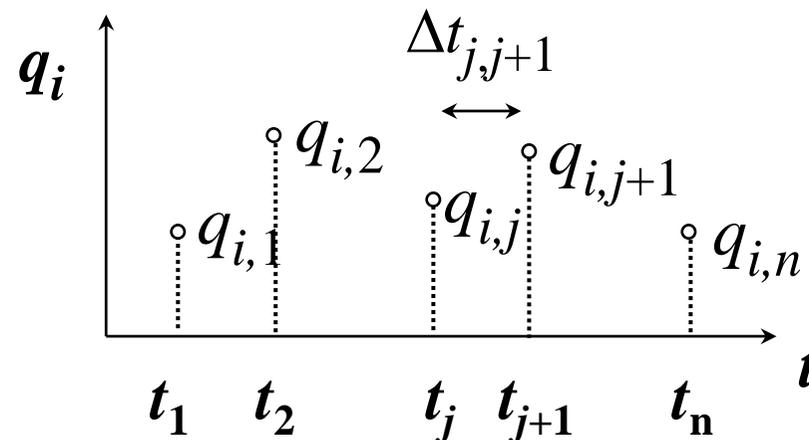
## PERCORSO CON PUNTI ESTREMI E INTERMEDI

- Si considera il caso in cui il **percorso** che un robot deve seguire sia specificato tramite l'assegnazione di
  - la posa iniziale  $\rightarrow \mathbf{P}_p = \{x_p \quad y_p \quad z_p \quad \alpha_p \quad \beta_p \quad \gamma_p\}^T$
  - la posa finale  $\rightarrow \mathbf{P}_a = \{x_a \quad y_a \quad z_a \quad \alpha_a \quad \beta_a \quad \gamma_a\}^T$
  - alcune pose intermedie  $\rightarrow \mathbf{P}_j = \{x_j \quad y_j \quad z_j \quad \alpha_j \quad \beta_j \quad \gamma_j\}^T \quad j = 2, 3, \dots, n-1$
- Supponiamo che le pose intermedie servano, ad esempio, a evitare degli ostacoli lungo il percorso  $\rightarrow$  in tal caso
  - solo le pose iniziale e finale devono essere soddisfatte esattamente
  - è sufficiente che le pose intermedie siano raggiunte approssimativamente
- Il procedimento prevede i seguenti passaggi
  - Si risolve il problema cinematico inverso per la posizione per tutte le pose assegnate  $\mathbf{P}_j \rightarrow \mathbf{Q}_j$ , con  $j = 1, 2 \dots n$ ,
  - Per ogni giunto  $i$ , tra ciascuna coppia di pose si sceglie una traiettoria: considereremo 2 tipi di traiettorie
    - ✓ traiettoria con accelerazione costante a tratti
    - ✓ traiettoria con accelerazione lineare a tratti

- Non è necessario scegliere lo stesso tipo di traiettoria per tutti i giunti
- In base alle traiettorie assunte per tutti i giunti tra ciascuna coppia di pose
- ✓ Si calcola il tempo di azionamento necessario all'intero robot per passare da

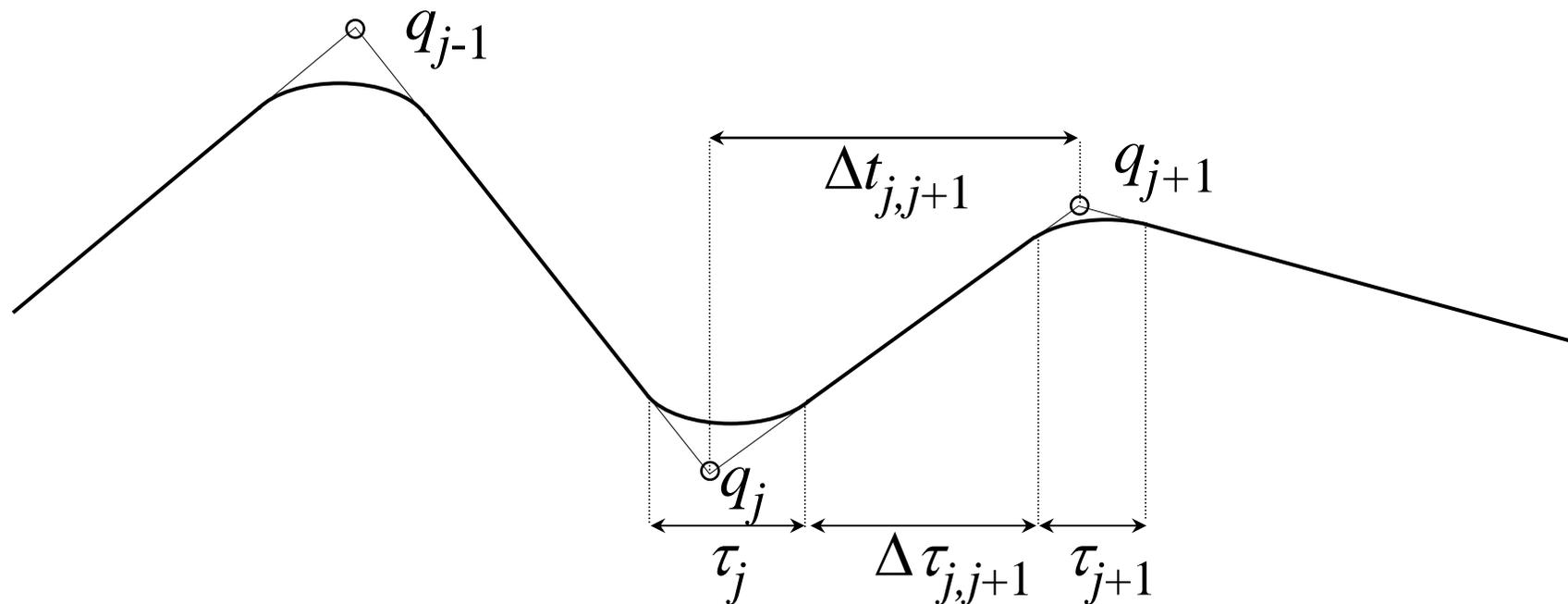
$$\mathbf{P}_j \text{ a } \mathbf{P}_{j+1} \rightarrow T_{a,j} = \max_{i=1}^6 \{T_{i,j}\} \rightarrow j=1, 2, \dots, n-1$$

- Per ogni giunto  $i$  si costruisce il grafico  $\rightarrow \Delta t_{j,j+1} = t_{j+1} - t_j = T_{a,j}$



- Gli istanti di tempo estremi e intermedi  $t_j$  devono essere comuni a tutti i giunti se si desidera che i punti  $\mathbf{P}_j$  siano soddisfatti  $\rightarrow$  tutti i giunti devono raggiungere le posizioni  $q_{i,j}$  contemporaneamente affinché la posa  $\mathbf{P}_j$  sia soddisfatta

- Il procedimento riguarda separatamente ogni giunto  $i \rightarrow$  si omette l'indice  $i$
- Si considera il caso in cui è sufficiente un passaggio approssimativo per i punti intermedi  $\mathbf{P}_j \rightarrow q_j$
- Adottare questa traiettoria equivale a raggiungere i punti con spostamenti
  - lineari  $\rightarrow$  accelerazione nulla
  - raccordati da tratti parabolici  $\rightarrow$  accelerazione costante
    - ✓ la curvatura è stabilita a priori  $\rightarrow$  valore predefinito dell'accelerazione  $|\ddot{q}_j|$



- Lungo i tratti rettilinei l'attuatore opera con velocità costante

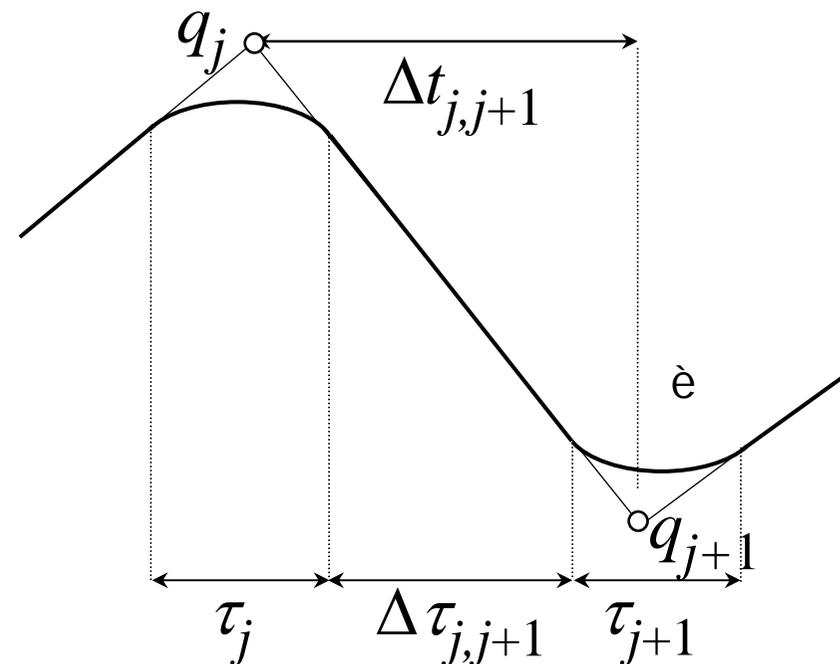
$$\dot{q}_{j,j+1} = \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta t_{j,j+1}}, \quad \ddot{q}_{j,j+1} = 0$$

- I tratti parabolici di raccordo sono così determinati → consideriamo il punto  $q_j$ 
  - Nell'intorno di ciascun punto  $q_j$  si stabilisce un'accelerazione costante  $|\ddot{q}_j|$  in base a varie considerazioni → regolarità del moto, limiti elettromeccanici, ...
  - Si calcola il tempo  $\tau_j$  del raccordo considerando che la variazione di velocità dal valore costante del tratto rettilineo che precede al valore costante del tratto rettilineo che segue avviene con accelerazione costante  $|\ddot{q}_j|$

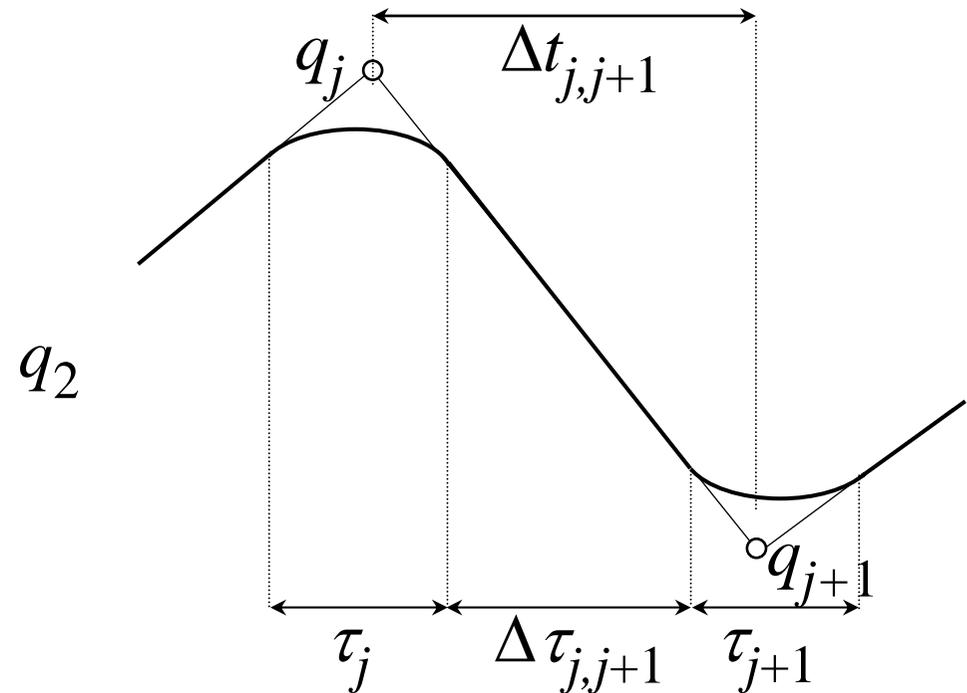
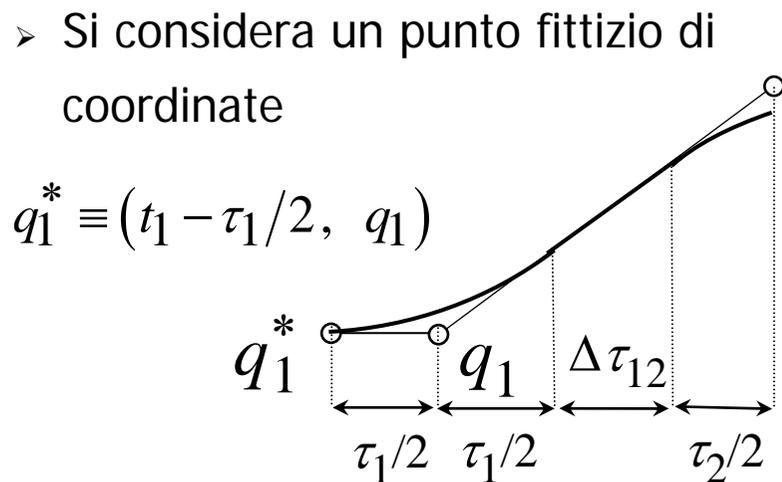
$$\tau_j = \frac{\dot{q}_{j,j+1} - \dot{q}_{j-1,j}}{\ddot{q}_j}$$

in cui  $\dot{q}_{j,j+1}$  e  $\dot{q}_{j-1,j}$  sono state definite in precedenza e l'accelerazione definita in segno da

$$\text{segno}(\ddot{q}_j) = \text{segno}(\dot{q}_{j,j+1} - \dot{q}_{j-1,j})$$



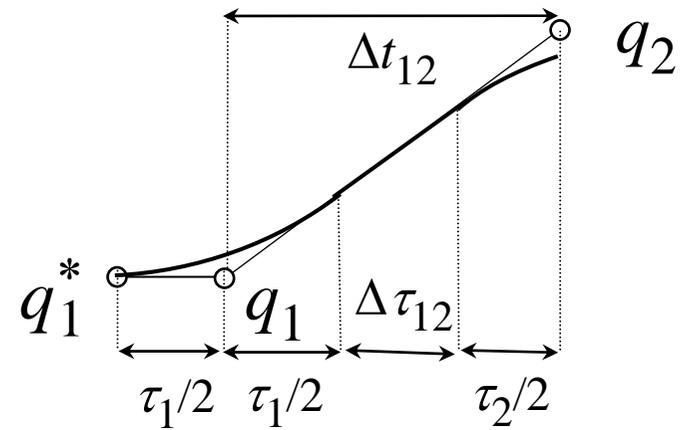
- Considerando l'intero movimento, il passaggio approssimato dal punto  $q_j$  al punto  $q_{j+1}$  avviene, per il giunto  $i$ , con la traiettoria
  - Tratto di durata  $\tau_j/2$  con accelerazione costante  $\rightarrow \ddot{q}_j$
  - Tratto di durata  $\Delta\tau_{j,j+1} = \Delta t_{j,j+1} - \tau_j/2 - \tau_{j+1}/2$  con velocità costante  $\rightarrow \dot{q}_{j,j+1}$
  - Tratto di durata  $\tau_{j+1}/2$  con accelerazione costante  $\rightarrow \ddot{q}_{j+1}$
- Se il passaggio per le pose iniziali e finali deve essere soddisfatto con esattezza  $\rightarrow$  è necessario seguire una diversa procedura
- La posa iniziale ha velocità nulla, per ogni giunto  $i$  si ha  $\rightarrow \dot{q}_1 = 0$



- La durata  $\tau_1$  del raccordo si calcola dallo schema e dal valore stabilito  $a_4^6$  priori dell'accelerazione  $\rightarrow |\ddot{q}_1|$

- ✓ Tratto con accelerazione costante da velocità nulla

$$\dot{q}_{12} - 0 = \ddot{q}_1 \tau_1$$



- Dalle espressioni precedenti si ha

$$\tau_1 = \frac{\dot{q}_{12}}{\ddot{q}_1} \quad \text{con} \quad q_1^* = q_1$$

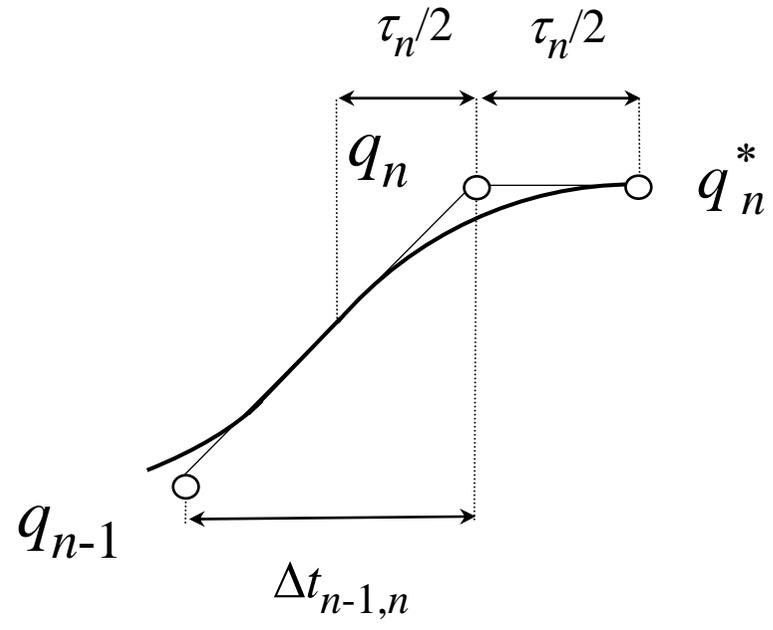
- Trovato  $\tau_1$  risultano determinate tutte le grandezze per generare la traiettoria del primo intervallo  $\rightarrow [q_1, q_2]$

- La posa finale ha velocità nulla, per ogni giunto  $i$  si ha  $\rightarrow \dot{q}_n = 0$
- Si considera un punto fittizio di  $q_n^* \equiv (t_n + \tau_n/2, q_n)$
- La durata  $\tau_n$  del raccordo si calcola dallo schema e dal valore stabilito a priori dell'accelerazione  $\rightarrow |\ddot{q}_n|$
- ✓ Tratto con accelerazione costante fino a velocità nulla

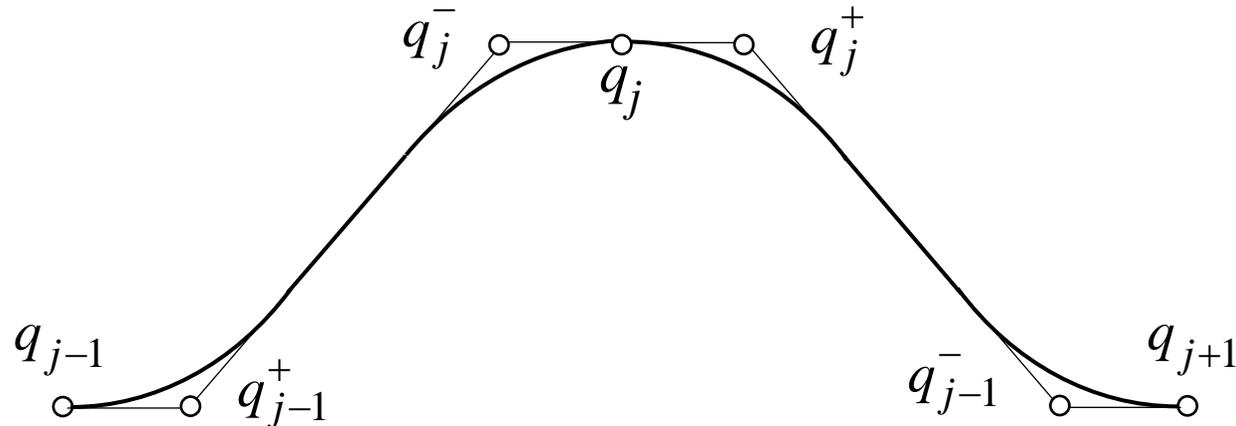
$$0 - \dot{q}_{n-1,n} = \ddot{q}_n \tau_n \quad \leftarrow \quad q_n^* = q_n$$

➢ Dalle espressioni precedenti si ha

$$\tau_n = \frac{\dot{q}_{n-1,n}}{\ddot{q}_n}$$



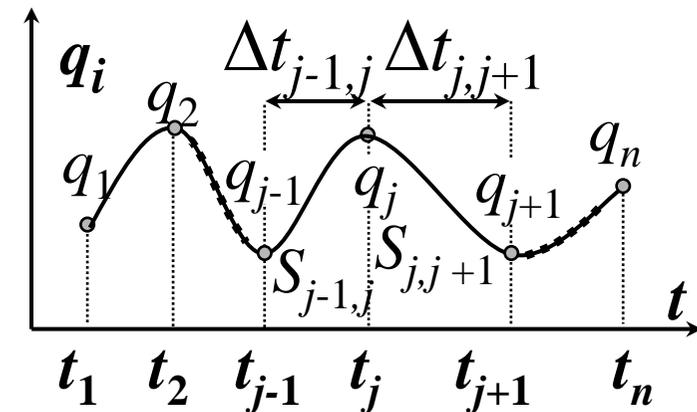
- Qualora si desideri che tutte le pose intermedie vengano raggiunte esattamente si possono aggiungere per ogni punto intermedio  $q_j$  due punti fittizi  $q_j^-$  e  $q_j^+$  in modo da realizzare una parabola con vertice in  $q_j$



- Il metodo dell'accelerazione costante a tratti ha il vantaggio di richiedere poche informazioni per definire, per ogni giunto  $i$ , ogni tratto di curva  $q_{i,j}(t)$ 
  - Raccordo parabolico intorno al punto  $q_j \rightarrow$  punti  $q_{j-1}, q_j, q_{j+1}$
  - Tratto rettilineo tra i punti  $q_j$  e  $q_{j+1} \rightarrow$  punti  $q_j, q_{j+1}$
  - Raccordo parabolico intorno al punto  $q_{j+1} \rightarrow$  punti  $q_j, q_{j+1}, q_{j+2}$

## Traiettorie con accelerazione lineare a tratti

- Il procedimento riguarda separatamente ogni giunto  $i \rightarrow$  si omette l'indice  $i$
- Adottare questa traiettoria equivale a
  - definire per ogni intervallo  $\Delta t_{j-1,j} = t_j - t_{j-1}$  un polinomio di 3° grado
  - imporre condizioni di continuità nei punti comuni a 2 intervalli contigui
    - ✓ allo spostamento
    - ✓ alla velocità  $\rightarrow$  derivata prima
    - ✓ all'accelerazione  $\rightarrow$  derivata seconda
  - si scelgono polinomi di 3° grado perché
    - ✓ sono sufficienti a garantire la continuità di spostamenti, velocità e accelerazioni
    - ✓ conducono alla curvatura minima  $\rightarrow$  accelerazione minima
    - ✓ evitano oscillazioni nell'interpolazione
- il metodo è noto come **interpolazione con splines cubiche**



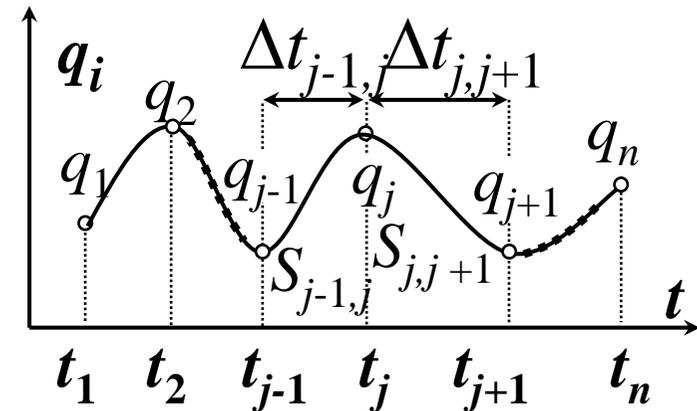
- Per ogni intervallo di tempo  $\Delta t_{j-1,j} = t_j - t_{j-1}$  si scrive un polinomio

$$S_{j-1,j}(t) = a_{j-1,j}t^3 + b_{j-1,j}t^2 + c_{j-1,j}t + d_{j-1,j} \longrightarrow \ddot{S}_{j-1,j}(t) = 6a_{j-1,j}t + 2b_{j-1,j}$$

- I coefficienti  $a_{j-1,j}$ ,  $b_{j-1,j}$ ,  $c_{j-1,j}$ ,  $d_{j-1,j}$  sono da determinare
- Essendoci tra  $n$  punti  $n-1$  intervalli  $\rightarrow 4(n-1)$  incognite
- Per determinare i coefficienti  $4(n-1)$  incogniti è necessario imporre  $4(n-1)$  condizioni

- ✓ condizioni iniziali e finali  $\rightarrow 4$  equazioni

$$\begin{cases} S_{12}(t_1) = q_1 & S_{n-1,n}(t_n) = q_n \\ \dot{S}_{12}(t_1) = 0 & \dot{S}_{n-1,n}(t_n) = 0 \end{cases}$$



- ✓ condizioni sulla posizione degli  $n-2$  punti intermedi e di continuità della velocità e accelerazione nei medesimi punti  $\rightarrow 4 \cdot (n-2)$  equazioni

$$\begin{cases} S_{j-1,j}(t_j) = S_{j,j+1}(t_j) = q_j & \leftarrow 2 \text{ equazioni} \\ \dot{S}_{j-1,j}(t_j) = \dot{S}_{j,j+1}(t_j) \\ \ddot{S}_{j-1,j}(t_j) = \ddot{S}_{j,j+1}(t_j) \end{cases}$$

- Imponendo queste  $4+4(n-2) = 4(n-1)$  condizioni si ottiene un sistema lineare di  $4(n-1)$  equazioni nelle  $4(n-1)$  incognite  $\rightarrow a_{j-1,j}$ ,  $b_{j-1,j}$ ,  $c_{j-1,j}$ ,  $d_{j-1,j}$

- La soluzione del sistema risulta onerosa se i punti da considerare sono numerosi anche se la matrice dei coefficienti è bandata
- Esistono varie scritture del sistema più convenienti; come esempio consideriamo una semplice formulazione che introduce dei benefici

➤ Si scrivono le splines e le loro derivate come segue

$$\begin{cases} S_{j-1,j}(t) = \tilde{a}_{j-1,j}(t-t_{j-1})^3 + \tilde{b}_{j-1,j}(t-t_{j-1})^2 + \tilde{c}_{j-1,j}(t-t_{j-1}) + \tilde{d}_{j-1,j} \\ \dot{S}_{j-1,j}(t) = 3\tilde{a}_{j-1,j}(t-t_{j-1})^2 + 2\tilde{b}_{j-1,j}(t-t_{j-1}) + \tilde{c}_{j-1,j} \\ \ddot{S}_{j-1,j}(t) = 6\tilde{a}_{j-1,j}(t-t_{j-1}) + 2\tilde{b}_{j-1,j} \end{cases}$$

➤ Questa scrittura è conveniente perché imponendo le condizioni

$$\begin{cases} S_{j-1,j}(t_{j-1}) = q_{j-1} & \Rightarrow & \tilde{d}_{j-1,j} = q_{j-1} \\ \dot{S}_{12}(t_1) = 0 & \Rightarrow & \tilde{c}_{12} = 0 \end{cases}$$

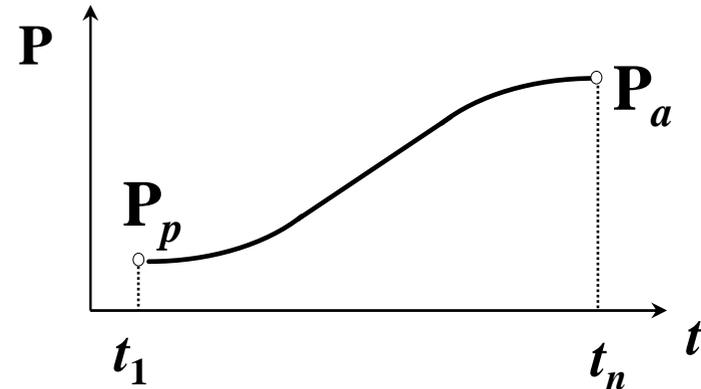
✓ si determinano indipendentemente  $n$  coefficienti → si riducono le dimensioni

- il metodo delle splines ha

- il vantaggio di interpolare esattamente i punti intermedi
- lo svantaggio di dover considerare tutti i punti assegnati contemporaneamente

## MOVIMENTO CON TRAIETTORIA ASSEGNATA

- Questo caso si presenta quando il robot esegue delle lavorazioni in movimento
  - saldatura
  - taglio
  - incollaggio
  - assemblaggio di circuiti
- Si possono seguire 2 metodi



### Scomposizione in Sotto-Traiettorie

- È un procedimento iterativo che minimizza il tempo di calcolo dividendo la traiettoria (percorso) in un numero minimo di tratti parziali
  - Sia assegnata la traiettoria (percorso) con punti estremi  $\mathbf{P}_p$  e  $\mathbf{P}_a$
- 1) Si risolve il problema cinematico inverso per  $\mathbf{P}_p \rightarrow \mathbf{Q}_p$  e  $\mathbf{P}_a \rightarrow \mathbf{Q}_a$  ed eventualmente anche per la velocità e accelerazione
  - 2) Si assegnano le condizioni sulla velocità e sull'accelerazione iniziali e finali se non sono già assegnate dal problema

$$\{\dot{\mathbf{Q}}_p, \dot{\mathbf{Q}}_a\}, \{\ddot{\mathbf{Q}}_p, \ddot{\mathbf{Q}}_a\}$$

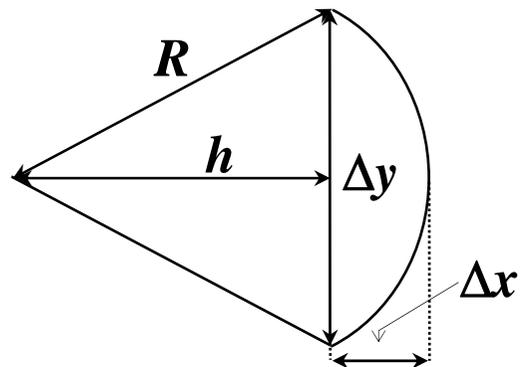
- 3) Per ogni giunto  $i$  si scelgono le leggi di moto per il movimento  $\mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{Q}_a$  adottando criteri che rispettino i limiti dei giunti  $\rightarrow V_{i,\max}, A_{i,\max}$  e  $P_{i,m,\max}$

- 4) Si scelgono alcuni punti di controllo sulla traiettoria (percorso) ottenuta
- si calcola la posizione la velocità e l'accelerazione del robot per questi punti risolvendo il problema diretto:  $\mathbf{Q}_j \rightarrow \mathbf{P}_j$
  - si verifica se i punti  $\mathbf{P}_j$  si trovano sulla traiettoria (percorso) entro limiti di tolleranza stabiliti
  - si assume che se la tolleranza è rispettata per i punti controllati lo è per tutta la traiettoria (percorso)
- 5) A questo punto ci sono 2 possibilità
- se le tolleranze sono rispettate  $\rightarrow$  il problema è risolto
  - se **le tolleranze non sono rispettate** si procede come segue
    - si suddivide la traiettoria (percorso) assegnata in 2 o più tratti
    - si risolve il problema inverso nei punti comuni ai tratti contigui
    - si impone in tali punti la continuità dello spostamento e della velocità, se non già specificate dal problema
    - si applica per ogni sotto-traiettoria il procedimento da **3)** a **5)**
    - si ripetono iterativamente le operazioni descritte sino a quando le tolleranze sono soddisfatte

- Comune nella pratica e di particolare interesse è il caso in cui si desidera generare una **traiettoria rettilinea**
- Lungo i tratti a velocità di crociera i moti uniformi delle variabili di giunto provocano spesso **percorsi approssimativamente circolari**
  - la traiettoria è approssimata con archi di circonferenza
  - risulta utile avere un'indicazione a priori di come suddividere il percorso
- Con riferimento allo schema, si vuole determinare una relazione tra errore sul percorso  $\Delta x$  e lunghezza del percorso  $\Delta y \rightarrow$  da considerazioni geometriche si ha

$$\begin{cases} h^2 + \frac{\Delta y^2}{4} = R^2 \rightarrow h^2 = R^2 - \frac{\Delta y^2}{4} \\ h + \Delta x = R \rightarrow \Delta x = R - h \end{cases}$$

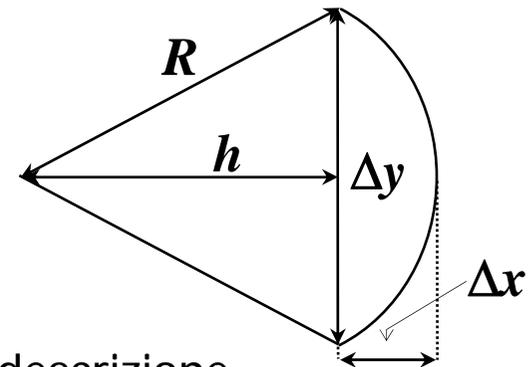
$$\Delta x = R - \sqrt{R^2 - \frac{\Delta y^2}{4}} = R \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta y^2}{4R^2}} \right)$$



➢ se  $\Delta y^2 \ll 4R^2 \rightarrow \Delta y^2/4R^2 \ll 1$  si può quindi scrivere, tramite lo sviluppo in serie di Taylor interrotto al termine lineare

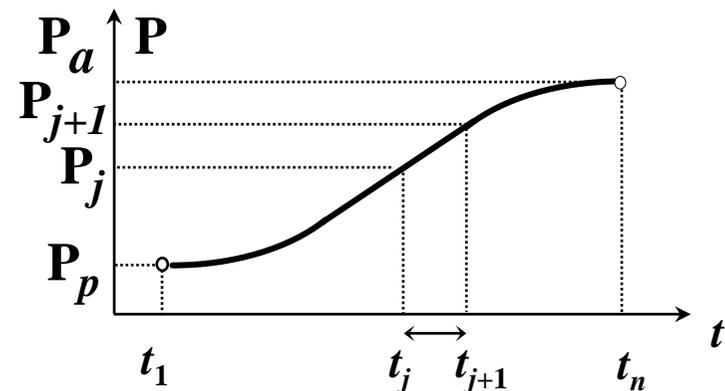
$$1 - \frac{\Delta y^2}{4R^2} \cong 1 - \frac{\Delta y^2}{8R^2} \Rightarrow \Delta x \cong R \left( 1 - 1 + \frac{\Delta y^2}{8R^2} \right) = \frac{\Delta y^2}{8R} \rightarrow \boxed{\Delta x \propto \Delta y^2}$$

- Risulta che l'errore sul percorso  $\Delta x$  è proporzionale al quadrato della lunghezza  $\Delta y$  del tratto rettilineo da approssimare  $\rightarrow$  dimezzando  $\Delta y$  l'errore  $\Delta x$  si riduce di **1/4**
- Questo è il motivo per il quale percorsi rettilinei possono essere approssimati soddisfacentemente con un numero limitato di archi di circonferenza
- La relazione precedente fornisce un'indicazione quantitativa di quante suddivisioni operare al punto **5)** della precedente descrizione



### Campionamento della Traiettoria

- Il procedimento è analogo al precedente, ma in questo caso la traiettoria (percorso) assegnata è divisa in uno numero di tratti stabilito a priori
- È più adatto del precedente quando si devono compiere un numero elevato di iterazioni come per traiettoria completamente assegnata  $\rightarrow$  posizione, velocità e accelerazione



▪ Il procedimento si compone dei seguenti passi

1) Si risolve il problema cinematico inverso

per i punti estremi  $\mathbf{P}_p \rightarrow \mathbf{Q}_p$  e  $\mathbf{P}_a \rightarrow \mathbf{Q}_a$  ed eventualmente anche per la velocità e accelerazione

2) Si determina con criteri adatti, ad esempio rispetto di  $V_{\max}$ ,  $A_{\max}$  e  $P_{m,\max}$ , il tempo di azionamento  $T_a$

3) Si sceglie un intervallo di campionamento  $\Delta t$  e si suddivide la traiettoria (percorso) assegnata in intervalli uguali

4) Si campiona la traiettoria assegnata e per ogni punto  $j \cdot \Delta t$  si risolve il problema cinematico inverso:  $\mathbf{P}_j \rightarrow \mathbf{Q}_j$ ,  $d\mathbf{Q}_j/dt$  e  $d^2\mathbf{Q}_j/dt^2$

5) Si interpola indipendentemente il movimento di ogni giunto  $i \rightarrow$  posizione, velocità e accelerazione

6) Si scalano le leggi di moto in modo da rispettare i limiti  $V_{\max}$ ,  $A_{\max}$  e  $P_{m,\max}$  per ogni giunto  $i$

